

### Exercice 1 (3 points)

Un groupe de 100 candidats ont passé un test d'inscription dans un centre de formation professionnelle. Le test est composé de deux épreuves obligatoires : une écrite et une orale. Les résultats ont montré que : 60 candidats ont réussi l'épreuve écrite dont 45 ont réussi aussi l'épreuve orale. Parmi ceux qui ont échoué dans l'épreuve écrite 25 % ont réussi l'épreuve orale. On choisit au hasard un candidat de ce groupe et on considère les événements suivants :  
A : « le candidat a réussi l'épreuve écrite » ; B : « le candidat a réussi l'épreuve orale ».  
Pour chacune des questions de cet exercice, une seule des trois réponses proposées est correcte.

N°	Question	Réponse A	Réponse B	Réponse C	
1	La probabilité $p(A)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
2	La probabilité $p(A \cap B)$ est	0.6	0.45	0.25	(0.5 pt)
3	La probabilité $p_A(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
4	La probabilité $p_{\bar{A}}(B)$ est	0.75	0.45	0.25	(0.5 pt)
5	la probabilité $p(B)$ est	0.75	0.55	0.1	(0.5 pt)

La durée de l'épreuve écrite varie de 20 à 60 minutes. On suppose que le temps X, exprimé en minutes, mis par un candidat avant de remettre sa copie, lors de cette épreuve, est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme.

6	La fonction de densité de X est	$f(x) = \frac{1}{20}$	$f(x) = \frac{1}{40}$	$f(x) = \frac{1}{60}$	(0.25 pt)
7	La probabilité que ce candidat remet sa copie après 30 minutes est	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	(0.25 pt)

Recopie sur la feuille de réponse et complète le tableau ci-contre en choisissant la bonne réponse.  
Aucune justification n'est demandée :

Question n°	1	2	3	4	5	6	7
Réponse							

### Exercice 2 (5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . Pour tout nombre complexe  $z$  on pose :  $P(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (3 + 3i)z - 4i$ .

- 1.a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe  $-8 + 6i$  0,5pt
- b) Calculer  $P(i)$  0,5pt
- c) Déterminer les nombres  $a$  et  $b$  tels que pour tout nombre complexe  $z$  on a :  $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$ . 0,5pt
- d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation  $P(z) = 0$ . 0,5pt
- 2) Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = i$ ,  $z_B = 1 - i$  et  $z_C = 2 + 2i$ .
- a) Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . 0,5pt
- b) Déterminer la nature du triangle  $ABC$ . 0,25pt
- c) Déterminer l'affixe du point  $D$  tel que  $ABDC$  soit un parallélogramme. 0,25pt
- d) Déterminer et construire l'ensemble  $\Gamma$  des points  $M$  du plan d'affixe  $z$  tel que  $\left| \frac{z - 2 - 2i}{z - 1 + i} \right| = 1$ . 0,5pt
- 3° Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $z_n = (z_C)^n$  et  $v_n = |z_n|$ .
- a) Vérifier que  $z_C = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$  puis en déduire l'écriture trigonométrique de  $z_n$ . 0,5pt
- b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme. 0,5pt
- c) Calculer la limite de  $(v_n)$  et exprimer en fonction de  $n$  la somme  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  0,5pt

### Exercice 3 (5 points)

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 2x - 1 + 2xe^{-x}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1° a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  0,5pt
- b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement. 0,5pt
- c) Montrer que la droite  $D$  d'équation  $y = 2x - 1$  est une asymptote oblique à  $(C)$  et étudier la position relative entre  $(C)$  et  $D$ . 0,5pt
- 2° a) Calculer la dérivée  $f'$  puis montrer que l'expression de la dérivée seconde de  $f$  est  $f''(x) = (2x - 4)e^{-x}$  0,5pt
- b) Montrer que la courbe  $(C)$  admet un point d'inflexion  $A$  dont on donnera les coordonnées. 0,25pt
- c) Etudier les variations de  $f'$  et en déduire que  $f'$  est positive. 0,5pt
- d) Dresser le tableau de variation de  $f$ . 0,5pt
- 3° a) Montrer que la courbe  $(C)$  coupe  $(Ox)$  en un unique point d'abscisse  $\alpha$  avec  $0.2 < \alpha < 0.3$  0,5pt
- b) Déterminer le point  $B$  de  $(C)$  où la tangente  $T$  est parallèle à l'asymptote  $D$ . Donner une équation de  $T$ . 0,5pt
- c) Tracer  $D$ ,  $T$  et  $(C)$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . 0,5pt
- d) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre de solutions de l'équation :  $-m - 1 + 2xe^{-x} = 0$  0,25pt

### Exercice 4 (7 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2 + x + x \ln x}{x}$  et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1° a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  et interpréter graphiquement. (0,75pt)
- b) Vérifier que  $f(x) = \frac{2}{x} + 1 + \ln x$  (0,5pt)
- c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement (0,5pt)
- 2° a) Calculer  $f'(x)$  et dresser le tableau de variation de  $f$ . (1pt)
- b) Donner une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(C)$  au point d'abscisse  $x_0 = 1$  (0,5pt)
- 3° Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $I = ]0; 2]$
- a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $I$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera. (0,5pt)
- b) Dresser le tableau de variation de  $g^{-1}$ , où  $g^{-1}$  est la fonction réciproque de  $g$ . (0,5pt)
- c) Calculer  $(g^{-1})'(3)$  (on pourra utiliser 2° b)) (0,25pt)
- d) Construire  $(C)$ ,  $(C')$  et  $T$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , où  $(C')$  est la courbe de  $g^{-1}$ . (0,5pt)
- 4° On considère la fonction  $h$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h(x) = f(x) - x$
- a) Dresser le tableau de variation de  $h$ . (0,5pt)
- b) Montrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$ , telle que  $2 < \alpha < 3$ . Vérifier que  $f(\alpha) = \alpha$  et en déduire que  $\forall x \geq \alpha$  on a  $f(x) - x \leq 0$  (0,5pt)
- 5° Soit  $(u_n)$  la suite définie par 
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$
- a) Montrer par récurrence que  $u_n \geq \alpha$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . (0,25pt)
- b) Montrer que  $(u_n)$  est décroissante (on pourra utiliser 4° b). En déduire que  $(u_n)$  est convergente. (0,25pt)
- 6° a) Utiliser une intégration par parties pour calculer l'intégrale  $K = \int_1^e \ln x dx$ . (0,25pt)
- b) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$  (0,25pt)

*Fin*